- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2-2x\cdot(x \ \ln x)) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2(1-2 \ \ln x)) = -\infty$

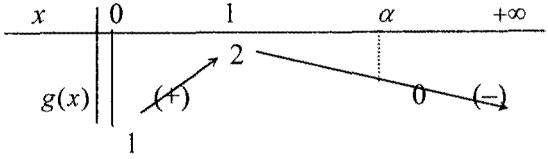
2°/a) D'après le tableau de variations de g on a :

- $\forall x\in]0,1]$, $g(x)\geq 1 \Rightarrow \forall x\in]0,1]$, $g(x)\neq 0$
- g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$ et comme $0\in]-\infty,2[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in]1,+\infty[$ par g.

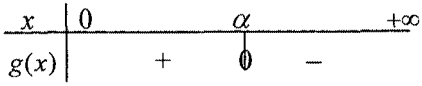
Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α.

b) On a : $\begin{cases} g(1{,}8)\cdot g(1{,}9)<0 \\ \text{et} \\ g \text{ est continue sur } [1{,}8\ ;\ 1{,}9] \end{cases}$ donc $1{,}8<\alpha<1{,}9$

c) On a :



d'où le tableau de signe de $g(x)$:



3°/a) • f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables ($x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto 1+x^2$).

- $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2)-2x \ \ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2 \ \ln x}{x(1+x^2)^2}=\frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

b) On a : $g(\alpha)=0 \Rightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^2 \ \ln\alpha=0 \Rightarrow \ln\alpha=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$